ที่มาของระบบเสียงของเครื่องดนตรีในปัจจุบัน
A Background of Equal Temperament Tuning System

ฆ้อง มงคล, สมพงศ์ ทองคำ และวิรินทร์ญา กิตติคุณนพวัชร
สาขาวิชาดนตรีสากล คณะมนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏราชนครินทร์

Abstract

Before the 12 Equal Temperament Tuning System is used as a standard for modern music, other tuning systems were used widely such as Pythagorean Tuning and Just Intonation which hold a few pure and consonant intervals. Later, the Meantone Scale and Well-temperament were developed to accommodate the musical development of the Renaissance and Baroque. Then, the 12 equal temperament tuning system was emerged and has become widespread by its prominent feature in the ability to modulate through all scales freely. This advantage is appropriate for the modern music which is significantly related to chromatic intervals. However, since it cannot provide any key colors, it is more likely that this system is not suitable for some types of music such as renaissance and baroque music which considerably concern about the characteristic.

Keywords : Musical tuning, Equal temperament, Frequency ratio, Intervals

บทคัดย่อ

ระบบเสียง 12 equal temperament tuning system เป็นมาตรฐานของการเทียบเสียงดนตรีสากลในปัจจุบัน ก่อนหน้าที่ระบบการเทียบเสียงนี้จะเป็นที่นิยมแพร่หลาย นักดุริยางควิทยาและนักคณิตศาสตร์ได้เสนอวิธีการในการเทียบเสียงดนตรีหลายๆ แบบ เช่น ระบบ Pythagorean tuning และ Just Intonation ที่มีคู่เสียงที่กลมกลืนเพียงไม่กี่คู่ ต่อมาระบบ Meantone Scale และ Well-temperament ได้ถูกพัฒนาเพื่อให้รองรับกับพัฒนาการทางดนตรีในสมัยเรอเนสซองส์ และบาโรค หลังจากนั้น ระบบ 12 equal temperament tuning system ที่ใช้ในปัจจุบันถูกพัฒนาขึ้นมาเพื่อให้สามารถย้ายบันไดเสียงได้อย่างอิสระ แต่ก็มีข้อเสียคือไม่สามารถสร้างขั้นคู่ที่กลมกลืนได้เลย ดนตรีสมัยใหม่ทั้งหลายมีความเกี่ยวข้องกับหลักการของขั้นคู่โครมาติกมากขึ้น ฉะนั้น 12 equal temperament tuning system จึงเป็นทางเลือกที่ดีที่สุด แต่ในการบรรเลงเพลงที่แต่งในสมัยก่อนอย่างเช่น ยุคเรอเนสซองส์ หรือบาโรค ระบบการเทียบเสียงนี้อาจจะทำให้เพลงสูญเสียบุคลิกของบันไดเสียงได้

คำสำคัญ : การเทียบเสียงเครื่องดนตรี อัตราส่วนความถี่เสียง ขั้นคู่เสียง

บทนำ

ระบบ 12 Tone Equal Temperament Tuning System เป็นระบบการเทียบเสียงที่ได้รับความนิยมแพร่หลายมากที่สุด และเป็นมาตรฐานของการเทียบเสียงของดนตรีตะวันตกขณะนี้ (Sadie, Stanley & Tyrrell, 2001, p. 275) เครื่องดนตรีในปัจจุบันโดยเฉพาะเครื่องดนตรีที่มีระดับเสียงแน่นอน (Fixed pitch instrument) เช่น เครื่องสายชนิดมีเฟร็ต เปียโน เครื่องลมไม้ รวมถึงเครื่องดนตรีอิเล็กทรอนิกส์ทั้งหลาย ได้ถูกสร้างและเทียบเสียงด้วยระบบ 12 Tone Equal Temperament Tuning System นี้

ก่อนที่ระบบเสียงนี้จะเป็นที่นิยม นักดุริยางควิทยาในอดีตได้เสนอวิธีการเทียบเสียง (tuning) แบบอื่นๆ หลายแบบ ตลอดประวัติศาสตร์ของดนตรีตะวันตกเพื่อให้สอดคล้องกับแนวคิดการแบ่งช่วงทบ (octave) ออกเป็น 12 ส่วนเท่าๆ กัน

ระบบเสียงแบบ 12 เสียงในหนึ่งช่วงทบ (12 Equidistant Tuning System) ของดนตรีตะวันตกมีแนวคิดในการแบ่งช่วงทบ (octave) โดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์เพื่อแบ่งช่วงทบ ออกเป็น 12 ส่วนเท่าๆ กัน ระยะห่างแต่ละขั้นเรียกว่า semitone ดังนั้นความกว้างใน 1 ช่วงทบ (octave) จึงมีความกว้าง (ระยะห่าง) เท่ากับ 12 semitone

ภาพที่ 1 ช่วงทบจาก C ถึง C' มีโน้ตโครมาติก 12 ตัว
ที่มา : http://www.musiccrashcourses.com/lessons/chromatic.html

ระยะห่าง 2 semitone เท่ากับ 1 tone หรืออาจกล่าวว่า 1 octave เท่ากับ 6 tone ก็ได้ บันไดเสียงต่างๆ ก็ประกอบขึ้นจาก tone และ semitone นี้ ยกตัวอย่างเช่น บันไดเสียงเมเจอร์และไมเนอร์ซึ่งมี 7 เสียง

เพื่อการศึกษาเสียงดนตรีอย่างเป็นระบบ อเล็กซานเดอร์ เจ. เอลลิส นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษได้กำหนดให้ความกว้างของหนึ่งช่วงทบเท่ากับ 1,200 เซ็นต์ (cent) ความกว้างของ 1 semitone เท่ากับ 100 เซ็นต์ และความกว้างของ 2 semitone เท่ากับ 1 tone เท่ากับ 200 เซ็นต์ ครึ่งเสียงหรือ semitone เป็นระยะห่างที่เล็กที่สุดของระบบเสียงแบบนี้ (Benson, 2008, p. 166)

ขนาดของขั้นคู่ (Intervals) ต่างๆ ยังสัมพันธ์กับขนาดของ semitone ด้วย

ตารางที่ 1 ขนาดของขั้นคู่เสียงต่างๆ

ขั้นคู่ (intervals)	ความกว้าง	สัญลักษณ์	ตัวอย่าง
คู่สองไมเนอร์ (minor second)	1 semitone	m2	E - F
คู่สองเมเจอร์ (major second)	2 semitone	M2	C - D
คู่สามไมเนอร์ (minor third)	3 semitone	m3	E - G
คู่สามเมเจอร์ (major third)	4 semitone	M3	F - A
คู่สี่เพอร์เฟ็คท์ (perfect fourth)	5 semitone	P4	C - F
คู่สี่ออกเมนเต็ด (augmented fourth) หรือ คู่ห้าดิมินิช (diminished fifth)	6 semitone	AUG4, DIM5	F - B
คู่ห้าเพอร์เฟ็คท์ (perfect fifth)	7 semitone	P5	D - A
คู่หกไมเนอร์ (minor sixth)	8 semitone	m6	E - C
คู่หกเมเจอร์ (major sixth)	9 semitone	M6	C – A
คู่เจ็ดไมเนอร์ (minor seventh)	10 semitone	m7	C – Bb
คู่เจ็ดเมเจอร์ (major seventh)	11 semitone	M7	C - B
คู่แปด (octave)	12 semitone	Octave	C – c'

ระบบเสียงแบบ 12 เสียงเท่ากันใน 1 ช่วงทบ (12 Equidistant Tuning System) นี้ เป็นหลักการพื้นฐานของทฤษฎีดนตรีสากล แต่ในการปฏิบัติการสร้างหรือการเทียบเสียงเครื่องดนตรีจริงๆ (เช่น การเทียบเสียงเปียโนหรือการวางตำแหน่งของ fret บนคอของเครื่องดนตรีประเภทเครื่องสาย หรือการกำหนดความยาวท่อลมของออร์แกน) เพื่อให้เครื่องดนตรีชิ้นใดชิ้นหนึ่งมีระบบเสียงแบบเดียวกับระบบเสียงในทฤษฎีนั้นจะมีหลักการอะไรบ้าง ในบทความนี้จะอธิบายแนวคิด วิธีการและความเป็นมาของการเทียบเสียงในดนตรีสากลแบบต่างๆ

เราได้ยินได้อย่างไร

ในหูของเรามีแก้วหูซึ่งเป็นอวัยวะที่ไวต่อการสั่นสะเทือนของอากาศ ทำหน้าที่แปลงการสั่นสะเทือนของอากาศเป็นสัญญาณส่งไปที่สมองเพื่อแปลความหมาย (Benson, 2008, p. 7) การสั่นสะเทือนของอากาศอาจเกิดจากธรรมชาติหรือจากมนุษย์เช่น จากการพูด การร้องเพลงหรือการเล่นเครื่องดนตรี ซึ่งการเล่นเครื่องดนตรีนั้นก่อให้เกิดการสั่นสะเทือนของอากาศอย่างเป็นระเบียบ ไม่ว่าจะจากสายของเครื่องสาย การสั่นสะเทือนของลม การสั่นสะเทือนของแผ่นหนัง หรือการสั่นสะเทือนของตัววัตถุที่ใช้ทำเป็นเครื่องดนตรีนั้น เกิดเป็นเสียงสูงๆ ต่ำๆ เรียกว่า pitch ระดับเสียง

แต่ละ pitch มีความสูงต่ำต่างกันจำแนกโดยจำนวนครั้งของการสั่นสะเทือน ใน 1 วินาที มีหน่วยเป็นเฮิร์ตซ์ (Hz) เช่นโน้ตตัว A ในออกเทฟที่ห้าของเปียโน (A5) ถูกกำหนดให้มีความถี่ 440 เฮิร์ตซ์ ช่างเทคนิคผู้เทียบเสียงเปียโนจะต้องปรับความตึงของสายให้มีการสั่นสะเทือน 440 ครั้งต่อวินาที ยิ่งความถี่ในการสั่นสะเทือนสูงเสียงจะยิ่งสูงขึ้น ในทางตรงกันข้ามถ้าความถี่ในการสั่นสะเทือนต่ำเสียงก็จะยิ่งต่ำ เช่นเสียงที่มีความถี่ 1,000 เฮิร์ตซ์จะมีเสียงต่ำกว่าเสียงที่มีความถี่ 2,756 เฮิร์ตซ์ เป็นต้น หูของมนุษย์เราสามารถได้ยินเสียงที่ความถี่ตั้งแต่ 20 เฮิร์ตซ์จนถึง 20,000 เฮิร์ตซ์สัตว์ต่างๆก็มีความสามารถในการได้ยินแตกต่างกันไป คนเรารับรู้เสียงใน 4 คุณลักษณะ คือ ความดัง-เบาของเสียง ความสูง-ต่ำของระดับเสียง การแยกแยะน้ำเสียง และความยาวของเสียง

ไพธากอรัส นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกผู้มีชีวิตอยู่เมื่อศตวรรษที่ 6 ก่อนคริสต์ศักราชเป็นผู้ที่สนใจค้นคว้าในเรื่องหลักการของเสียง ได้ทำการทดลองโดยตรวจสอบการสั่นสะเทือนของสายลวด (Benson, 2008, p. 147) และพบว่า ในสภาพแวดล้อมที่คล้ายกัน (ขนาดและความตึงเท่ากัน) เส้นลวดที่มีความยาวเท่ากันจะสั่นสะเทือนด้วยความถี่ที่เท่ากัน ทำให้เกิดเสียงสองเสียงที่มีระดับเสียงเท่ากัน เมื่อเส้นลวดทั้งสองสั่นสะเทือน (ดัง) พร้อมกัน ฟังแล้วจึงจะทำให้เกิดความรู้สึกประสานกลมกลืน อัตราส่วนความยาวของเส้นลวดทั้งสองเท่ากันคือ = 1/1 หรืออีกนัยหนึ่งอัตราส่วนความถี่เสียงของเส้นลวดทั้งสอง = 1/1 หากสายลวดเส้นหนึ่งมีความยาวเป็นสองเท่าของอีกเส้นหนึ่งหรือมีอัตราส่วน ความถี่ของสายที่สั้นกว่าจะเป็นสองเท่าของสายที่ยาวกว่า ตัวอย่างเช่น ถ้าสายเส้นแรกสั่นด้วยความถี่ 400 เฮิร์ตซ์ สายเส้นที่สองจะมีความถี่เท่ากับ 800 เฮิร์ตซ์ จากการคำนวณความถี่คูณด้วยอัตราส่วน 400.2/1= 800 ขั้นคู่เสียงนี้เรียกว่าคู่แปด (octave) เป็นคู่เสียงที่มีความประสานกลมกลืนอย่างมาก แม้ว่าจะอยู่ห่างกันถึงแปดเสียง แต่เมื่อฟังพร้อมกันจะให้ความรู้สึกเหมือนเสียงเดียวกัน ชายและหญิงอาจร้องเพลงเดียวกันไปพร้อมๆ กันโดยที่ระดับเสียงต่างกันอยู่ 1 octave พอดีโดยจะไม่รู้สึกว่าเสียงเพี้ยนเลย

ไพธากอรัส ยังค้นพบอัตราส่วนอื่นๆ อีกเช่นอัตราส่วนของความถี่เสียง 3/2 ได้ขั้นคู่เสียงที่มีความประสานกลมกลืนมาก เรียกว่าคู่ห้าเพอร์เฟ็คท์ (เช่นโน้ต C-G บนเปียโน) อัตราส่วน 4/3 ได้คู่สี่เพอร์เฟ็คท์ (เช่น C-F) ซึ่งเป็นคู่เสียงที่ฟังแล้วประสานกลมกลืนเช่นกัน การทดลองของไพธากอรัสมีแนวคิดที่ว่าการเคลื่อนไหวของธรรมชาติโลกและจักรวาลมีพื้นฐานอยู่บนสมการและเศษส่วนที่ไม่ซับซ้อนทางคณิตศาสตร์บางอย่าง การค้นพบนี้เป็นครั้งแรกที่มนุษย์อธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติด้วยหลักการทางคณิตศาสตร์

เราได้ยินเสียงประสานได้อย่างไร

ขั้นคู่เสียงที่ประสานกันอย่างกลมกลืนนั้นมีความถี่เสียงที่สัมพันธ์กันในรูปแบบของเศษส่วนอย่างง่าย ยิ่งเลขเศษส่วนมีค่าน้อยเท่าไหร่ความรู้สึกประสานกลมกลืนก็จะมีมากขึ้นเท่านั้น ตรงกันข้ามเมื่อเลขเศษส่วนมีค่ามาก ความรู้สึกประสานกลมกลืนก็จะน้อยลง

ตารางที่ 2 อัตราส่วนขั้นคู่เสียงของไพธากอรัส

ขั้นคู่เสียง (Intervals)	อัตราส่วนความถี่เสียง (Frequency Ratio)
คู่ 1 Unison	1:1
คู่ 8 Octave	2:1
คู่ 5 Perfect Fifth	3:2
คู่ 4 Perfect Fourth	4:3

เสียงสองเสียงที่มีสัดส่วนของความถี่เสียงเป็นเลขจำนวนน้อยๆ เช่นนี้ จะมียอดคลื่นของเสียงทั้งสองอยู่ตรงกันมาก ทั้งของ fundamental tone และ harmonics การที่ยอดคลื่นตรงกันจะทำให้เกิดคลื่นเสียงรวมที่มีลักษณะเฉพาะที่ประสาทสัมผัสทางหูของมนุษย์สามารถตรวจจับความเป็นระเบียบนี้ได้และรู้สึกว่าเสียงทั้งสองนั้นประสานกันอย่างกลมกลืน

แต่ถ้าหากปรับความถี่เสียงของคู่เสียงที่กลมกลืนนั้นให้เพี้ยนไปสักเล็กน้อยจะทำให้เกิดความรู้สึกกลมกลืนน้อยลงและจะเริ่มได้ยินเสียงบีทส์ (Beats) ซึ่งมีลักษณะเป็นคลื่นเสียงดังเบาสลับกันไป เสียงบีทส์นี้ เป็นปรากฏการณ์ทางธรรมชาติของเสียงสองเสียงที่มีความถี่เสียงใกล้เคียงกันจนเกือบจะเท่ากัน สั่นสะเทือนไปพร้อมกัน ยิ่งความถี่ทั้งสองห่างกันมากขึ้น เสียงบีทส์จะเร็วมากขึ้น ยิ่งความถี่ของเสียงทั้งสองใกล้กันมากขึ้น เสียงบีทส์จะช้าลง จนถึงจุดที่เสียงทั้งสองมีความถี่เท่ากันพอดี เสียงบีทส์จะหายไปและเสียงทั้งสองจะฟังกลมกลืน (Cary, 1995, p. 53)

ช่างเทคนิคผู้เทียบเสียงเปียโนและผู้เล่นเครื่องสายใช้หลักการนี้ในการเทียบเสียงระหว่างสายสองเส้น กล่าวคือหากเทียบแล้วยังคงได้ยินเสียงบีทส์ หมายความว่าสายทั้งสองยังมีระดับเสียงที่ไม่ตรงกัน หากปรับความตึงของสายแล้ว เสียงบีทส์มีความเร็วที่ช้าลง หมายความว่าเสียงทั้งสองเริ่มมีความถี่ใกล้เคียงกันมากขึ้น ต่อเมื่อเทียบเสียงจนไม่ได้ยินเสียงบีทส์แล้ว สายทั้งสองเส้นนั้นจึงมีระดับเสียงที่ตรงกันอย่างแท้จริง

Pythagorean Tuning

การเทียบเสียงแบบไพธากอเรียน มีแนวคิดว่าเราสามารถสร้างบันไดเสียงต่างๆ จากอัตราส่วนของไพธากอรัส ได้โดยการ

คำนวณที่ใช้เลขเศษส่วนที่ประกอบด้วยเลขจำนวนเต็มที่มีจำนวนน้อยมากๆ การเทียบเสียงแบบนี้ใช้เพียงอัตราส่วน 2/1 (octave) และ 3/2 (perfect fifth) เท่านั้น (Sethares, 2005, p. 163) โดยมีวิธีการดังตัวอย่างต่อไปนี้

การสร้างบันไดเสียง F Lydian ที่มีโน้ตครบเจ็ดตัว

ขั้นตอนที่หนึ่ง เริ่มด้วยการเทียบเสียง f ที่เป็นเสียงหลักให้ได้ความถี่ที่ต้องการ แล้วจึงเทียบหาเสียง c ที่อยู่สูงขึ้นมา โดยการฟังเสียงคู่ห้าเพอร์เฟ็คท์ของโน้ต f-c ให้ประสานกลมกลืนกันโดยไม่ได้ยินเสียงบีทส์เลย หมายถึง c อยู่สูงกว่า f เป็นระยะคู่ห้าที่สมบูรณ์ (pure perfect fifth) ดังนั้นเสียง c มีอัตราส่วนการสั่นสะเทือน 3/2 เท่าของเสียง f ดังสมการ 1/1 x 3/2 = 3/2 ขณะนี้ได้โน้ตสองตัวแล้ว

f c

ขั้นตอนที่สองใช้โน้ต c ที่ได้ เทียบเสียงคู่ห้าที่อยู่เหนือขึ้นไป ซึ่งคือ g’ เสียง g’ จะมีอัตราส่วนความถี่เสียง 3/2 x 3/2 = 9/4

f c g’

แต่บันไดเสียงประกอบไปด้วยโน้ต g ที่อยู่ภายในคู่แปด โน้ตที่ได้นั้นอยู่นอกคู่แปดของ f โดยอยู่สูงเกินไปจึงต้องใช้ g’ เป็นหลักในการเทียบ g ที่อยู่ต่ำลงมาหนึ่งคู่แปด เมื่อ g’ กับ g กลมกลืนกันและไม่ได้ยินบีทส์แล้ว อัตราส่วนของ g คือ 9/4 ÷ ด้วย 2/1 เท่ากับ 9/8 ขณะนี้ในคู่แปดของ f เทียบหาตัวโน้ตในบันไดเสียงได้สามตัวแล้ว

f g c

ขั้นตอนที่สาม ใช้ g เป็นหลักในการเทียบหาคู่ห้า (perfect fifth) ที่อยู่สูงขึ้นไปซึ่งก็คือ d โดย d จะมีอัตราส่วนความถี่เสียงเท่ากับ 9/8 x 3/2 = 27/16 และเป็นโน้ตที่อยู่ในคู่แปดของ f ขณะนี้จึงมีโน้ตสี่ตัวในบันไดเสียงแล้ว

f g c d

ขั้นตอนที่สี่ ใช้เสียง d เป็นหลักในการเทียบเสียง a’ ที่อยู่สูงขึ้นไปเป็นระยะคู่ห้าเพอร์เฟ็คท์ (perfect fifth) จะได้ a’ = 27/16 x 3/2 = 81/32 แต่ a’ อยู่สูงนอกคู่แปดของ f จึงต้องลด a ลงหนึ่งคู่แปดด้วยการ÷ ด้วยอัตราส่วน 2/1 จะได้อัตราส่วนของ a = 81/32 ÷ 2/1 = 81/64 โน้ตที่ได้นี้เป็นโน้ตตัวที่ห้าของบันไดเสียง

f g a c d

ขั้นตอนที่ห้าใช้เสียง a 81/64 เทียบหาเสียง e ที่อยู่สูงขึ้นไปคู่ห้าเพอร์เฟ็คท์ (perfect fifth) จะได้ e = 81/64 x 3/2 = 243/128 และเป็นตัว e ที่อยู่ในคู่แปดของ f ดังนั้นขณะนี้มีโน้ตหกตัวในบันไดเสียงแล้ว

f g a c d e

ขั้นตอนที่หก ใช้ e เทียบหา b’ ที่อยู่สูงขึ้นไปคู่ห้าเพอร์เฟ็คท์ (perfect fifth) ได้ b’ = 243/128 x 3/2 แต่ b’ อยู่นอกคู่แปดของบันไดเสียงจึงต้องลดอัตราส่วนความทีของบีลงหนึ่งคู่แปด จะได้ b = 243/128 x 3/2 ÷ 2:1 ซึ่งเท่ากับ 243/128 x 3/2 x 1/2 = 729/512 ขณะนี้มีโน้ตครบทุกตัวในบันไดเสียง F Lydian แล้ว

f g a b c d e

ขั้นตอนสุดท้ายใช้ f เป็นหลักเพื่อเทียบหา f’ ที่อยู่สูงขึ้นไปเป็นระยะหนึ่งคู่แปด (octave) โดยการฟังคู่แปดของ f-f’ จนประสานกันสมบูรณ์ (pure octave) ก็จะได้ f’ ที่มีอัตราส่วนความถี่เสียงเป็น 2/1 (สองเท่า) ของเสียง f

f g a b c d e f’

การสร้างบันไดเสียงเช่น C major ก็ใช้วิธีเดียวกันและสามารถหาอัตราส่วนของ f ซึ่งเป็นคู่สี่เพอร์เฟ็คท์โดย P4 = octave - P5 อัตราส่วนของ P4 คือ 2/1 ÷ 3/2= 2/1 x 2/3 = 4/3 เป็นอัตราส่วนที่ประกอบด้วยเลขที่มีค่าน้อยขั้นคู่เสียงเช่นนี้จะให้เสียงที่ฟังแล้วมีความประสานกลมกลืนมาก เมื่อใช้หลักการของไพธากอรัสคำนวณแล้ว ตัวโน้ตทั้งหมดของบันไดเสียง C major มีอัตราส่วนดังนี้

ตารางที่ 3 อัตราส่วนของขั้นคู่ในบันไดเสียงซีเมเจอร์

Note	c	d	e	f	g	a	b	c
Ratio	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1

เราใช้หลักการของ Ellis มาวัดขนาดของอัตราส่วนความถี่เหล่านี้เพื่อให้เข้าใจขนาดของขั้นคู่ใน scale มากขึ้น สมการของการแปลงอัตราส่วนขั้นคู่เสียงให้เป็นระยะที่มีหน่วยเป็นเซ็นต์ คือ $1200\log_2(r) = 1200\ln(r)/\ln(2)$ และสมการที่แปลงจากระยะห่างในระบบเซ็นต์ เป็นอัตราส่วนความถี่เสียงคือ $2^{n/1200} : 1$ (Benson, 2008, p. 166) เมื่อคำนวณตามสมการแล้วได้ระยะห่างของแต่ละคู่เสียงดังนี้

ตารางที่ 4 ขนาดของขั้นคู่มีหน่วยเป็นเซ็นต์ (โดยประมาณ)

Note	c	d	e	f	g	a	b	c
Ratio	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1
Cents	0	204	408	498	702	906	1110	1200

เราสามารถคำนวณหาค่าสัดส่วนของขั้นคู่ต่างๆ ได้โดยการคูณหากต้องการทราบผลรวมของขั้นคู่ และการหาร ถ้าต้องการลดขั้นคู่ เช่น

m3 = P5 - M3
= 3/2 ÷ 81/64
= 3/2 x 64/81 =32/27

หรือ m3 = octave - M6
= 2/1 ÷ 27/16
= 2/1 x 16/27 = 32/27

และ m2 = octave - M7
2/1 ÷ 243/128
= 2/1 x 128/243 = 256/243

หรือ m2 = P4 - M3
4/3 ÷ 81/64
= 4/3 x 64/81 = 256/243

หากเราเทียบเสียงคู่ห้าที่อยู่สูงขึ้นไป 12 ครั้งแล้วลดเสียงที่ได้ลงมา 7 คู่แปดตามหลักการแล้วจะต้องกลับมา ที่จุดเดิมซึ่งมีอัตราส่วนความถี่ที่เท่ากันแต่จากการคำนวณ อัตราส่วนของโน้ตที่ได้กลับต่างกันอยู่เล็กน้อย อัตราส่วนที่แตกต่างกันอยู่เล็กน้อยนี้เรียกว่า Pythagorean comma มีค่าเท่ากับ $3^{12}/ 2^{19}$ หรือประมาณ 23.460 เซ็นต์

การคำนวณแบบ Pythagorean tuning หากเทียบหาโน้ตที่อยู่ห่างออกไปมากๆ อัตราส่วนของโน้ตเหล่านั้นจะผิดเพี้ยนไปมาก ในการบรรเลงอาจทำให้เกิดขั้นคู่ที่มีเสียงกระด้างมากเรียกว่า wolf intervals นอกจากนี้ยังให้เสียงคู่สามและคู่หกที่กระด้างมาก ซึ่งเป็นจุดอ่อนของการเทียบเสียงแบบนี้ แต่การดนตรีในสมัยกรีกจนถึงสมัยกลางยังไม่มีการประสานเสียง ดนตรีเป็นแบบทำนองเดียว และหลักการเทียบเสียงเหล่านี้ใช้เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างบันไดเสียง หาใช่เพื่อการประสานเสียงไม่ (Benson, 2008, p. 148) การมีคู่เสียงที่กระด้างอยู่ในบันไดเสียงเช่นนี้จึงไม่เป็นปัญหา เพราะในการประพันธ์ทำนองนั้น ผู้ประพันธ์จะหลีกเลี่ยงตัวโน้ตที่ไม่กลมกลืนต่อเมื่อเริ่มมีการประสานเสียงในสมัยกลาง ความกลมกลืนของขั้นคู่ในฐานะเสียงประสานจึงเริ่มถูกพิจารณา (Hoppin, 1978, p. 189)

Just Intonation

Just Intonation คือระบบการเทียบเสียงด้วยสัดส่วนที่ประกอบไปด้วยเลขจำนวนเต็ม ที่มีค่าน้อยๆ ดังนั้นตัวโน้ตจากบันไดเสียงที่เทียบหาโดยวิธี Just Intonation จะให้ขั้นคู่บางคู่ที่ฟังดูกลมกลืนกว่าการเทียบเสียงแบบ Pythagorean tuning ซึ่ง Didymus และ Ptolemy นักทฤษฎีที่มีชีวิตอยู่ในช่วงศตวรรษที่ 1-2 เสนอให้ใช้อัตราส่วน 5/4 สำหรับคู่สามเมเจอร์ แทนอัตราส่วน 81/64 ของไพธากอรัส ซึ่งเป็นสัดส่วนที่ซับซ้อนเกินไปและไม่กลมกลืน (Benward & Saker, 2003, p. 56)

วิธีการของ Just Intonation ก็คือเริ่มด้วยเทียบคู่สามเมเจอร์ด้วยอัตราส่วน 5/4 ให้ได้ขั้นคู่ที่สมบูรณ์ (pure intervals) สำหรับคู่สี่เพอร์เฟ็คท์และคู่ห้าเพอร์เฟ็คท์ ใช้วิธีการเดียวกับ Pythagorean tuning

สำหรับโน้ตตัว a หรือคู่หกเมเจอร์ ได้จากคู่สามเมเจอร์ รวมกับคู่สี่เพอร์เฟ็คท์ a = 5/4 x 4/3= 5/3 และโน้ตตัว b ได้จากคู่สามเมเจอร์รวมกับคู่ห้าเพอร์เฟ็คท์ b= 5/4 x 3/2= 15/8

ตารางที่ 5 อัตราส่วนขั้นคู่เสียงในบันไดเสียง Just Intonation

Note	c	d	e	f	g	a	b	c
Ratio	1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1
Cents	0	204	386	498	702	884	1088	1200

คู่สามเมเจอร์ของ Pythagorean tuning ที่มีอัตราส่วน 81/64 กับคู่สามเมเจอร์ของ Just Intonation ที่มีอัตราส่วน 5/4 นั้นแตกต่างกันอยู่เล็กน้อยเป็นอัตราส่วน 81/80 เรียกอัตราส่วนนี้ว่า Syntonic comma หรือเรียกว่า Ptolemaic comma, comma of Didymus มีความกว้างประมาณ 21.506 เซ็นต์

คู่สามเมเจอร์ อัตราส่วน 5/4 ของ บันไดเสียงที่เทียบด้วยวิธีนี้เรียกว่า Just major 3^{rd} คู่ 6 เมเจอร์ ที่มีอัตราส่วน 5/3 นี้เรียกว่า Just major 6^{th} คู่หกไมเนอร์ Just minor sixth ที่มีอัตราส่วน 8/5 และยังมีคู่สามไมเนอร์ Just minor 3^{rd} อัตราส่วน 6/5 แม้ว่า Just Intonation จะให้เสียงคู่สามและคู่หกที่กลมกลืนกว่าแบบ Pythagorean แต่ก็ยังคงมีขั้นคู่เสียงที่กระด้างมาก (wolf interval) อยู่

Meantone Scale

Meantone scale คือ tempered scale ชนิดหนึ่ง คำว่า temper หมายถึงการทำให้เล็กลง ทำให้แคบลง ในที่นี้หมายถึงการปรับปรุงขนาดของขั้นคู่เสียงให้แคบลงหรือกว้างขึ้นก็ได้ Tempered

scale มุ่งหมายที่จะแก้ปัญหาเรื่อง comma ที่ซับซ้อน การที่โน้ตตัวเดียวมีสองเสียง การที่คู่เสียงเดียวกันมีสองขนาด ของบันไดเสียง Pythagorean และ Just Intonation นอกจากนั้น ในสมัยเรอเนสซองส์เริ่มมีการใช้คู่สาม และคู่หกอย่างกว้างขวางมากขึ้น จึงมีความต้องการบันไดเสียงที่มีคู่สามและคู่หกที่กลมกลืน

หลักการของ Meantone Scale คือการทำให้คู่ห้าเพอร์เฟ็คท์ (perfect 5^{th}) แคบลงเล็กน้อยเป็นปริมาณที่สัมพันธ์กับ syntonic comma เพื่อทำให้คู่สามเมเจอร์ฟังดูกลมกลืนขึ้น Meantone scale ที่พบบ่อยที่สุดคือ quarter comma meantone scale มีวิธีสร้างโดยเริ่มจากเทียบคู่สามเมเจอร์ c-e ด้วยอัตราส่วน 5/4 แล้วแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน (Barbour, 2004, p. 27) จะได้อัตราส่วน whole tone ของ c:d:e เท่ากับ 1: √5:2:5/4 ซึ่งเป็นอัตราส่วนเดียวกันกับ f:g:a และ g:a:b ขณะนี้ whole tone ทั้งหมดของ Meantone scale มีขนาดเท่ากัน

ตารางที่ 6 อัตราส่วนขั้นคู่เสียงของ Quarter-comma Meantone

Note	c	d	e	f	g	a	b	c
Ratio	1:1	√5:2	5:4	$2:5^{1/4}$	$5^{1/4}:1$	$5^{3/4}:2$	$5^{5/4}:4$	2:1
Cents	0	193	386	503	697	890	1083	1200

คู่ห้าเพอร์เฟ็คท์ของ Meantone scale จะฟังดูไม่กลมกลืนเท่าคู่ห้าของ Pythagorean tuning เพราะถูกทำให้แคบลงเพื่อให้บันไดเสียงมีความผ่อนปรนมากขึ้น มีขั้นคู่ที่มีขนาดเท่ากันมากขึ้น แต่กระนั้น meantone scale ก็ยังมี wolf intervals อยู่หนึ่งคู่

อีกวิธีหนึ่งในการสร้าง Quarter-comma meantone scale คือทำเสียงคู่ P5 ให้ต่ำลงเป็นปริมาณ ¼ ของ Syntonic comma เพื่อให้คู่ 3 และคู่ 6 ฟังดูกลมกลืน ซึ่งเป็นที่มาของชื่อ Quarter-comma meantone scale

นอกจาก Quarter-comma meantone แล้วยังมี Meantone scale อื่นๆ อีกมากเช่น

1/3 Quarter-comma meantone

2/7 Quarter-comma meantone

2/9 Quarter-comma meantone

และ 1/5 Quarter-comma meantone เป็นต้น

Well Temperament

Well Temerament เป็นระบบการเทียบเสียงในศตวรรษที่ 16-19 ซึ่ง Well tempered scale เป็นบันไดเสียงที่ปรับปรุงมาจาก Meantone scale เพื่อให้มีความสามารถในการย้ายบันไดเสียงมากขึ้น และแก้ปัญหาในเรื่องขั้นคู่ wolf intervals ได้สำเร็จโดยกระจายอัตราส่วนที่กระด้างไปยังคู่ห้าคู่อื่นๆ แต่ก็มีผลทำให้คู่ห้าทั้งหลายในบันไดเสียงมีขนาดแคบลงและมีความกลมกลืนน้อยลงในระดับหนึ่ง

Well tempered scale มีวิธีสร้างมากมาย ยกตัวอย่างเช่น Werckmeister temperament ที่คิดค้นโดย Andreas Werckmeister นั้นประกอบไปด้วย Werckmeister I - IV ที่มีการคำนวณอันซับซ้อน

บาค (J.S. Bach) ได้ประพันธ์ Well tempered Clavier ซึ่งประกอบด้วยเพลงในทุกคีย์ สิ่งนี้พิสูจน์ความสามารถในการย้ายบันไดเสียงของระบบ well temperament อย่างไรก็ดีบาคหลีกเลี่ยงที่จะใช้โน้ตบางตัวในบางบันไดเสียง

12 Equal Temperament

เป็นระบบการเทียบเสียงที่เริ่มเป็นที่นิยมตั้งแต่ ศตวรรษที่ 19 เป็นเวลาที่นักประพันธ์มีแนวโน้มที่จะใช้ขั้นคู่เสียงอันซับซ้อนมากขึ้น ใช้ขั้นคูโครมาติกมากขึ้น จึงต้องการบันไดเสียงแบบ 12 เสียงที่ระดับเสียงทั้ง 12 อยู่ห่างเท่าๆ กันอย่างแท้จริง

แนวคิดของ 12 equal temperament นั้นง่ายมากคือต้องการหาอัตราส่วนอันหนึ่ง เป็นอัตราส่วนความกว้างของ semitone ซึ่งถ้าอัตราส่วนนี้ 12 ครั้งแล้วผลลัพธ์จะต้องได้ = 1 octave พอดี อัตราส่วนนั้นคือ

$$2^{1/12}:1$$

หรือสามารถคำนวณความถี่เสียงได้โดยคูณด้วย $\sqrt[12]{2}$ เช่น A = 440 Hz ดังนั้น A# = 440 x $\sqrt[12]{2}$ = 466.163 Hz เมื่อคำนวณตามสูตรแล้วจะได้ความสัมพันธ์ของขั้นคู่ต่างๆ ดังนี้

ตารางที่ 7 อัตราส่วนขั้นคู่เสียงของ Equal Temerament

Note	c	d	e	f	g	a	b	c
Ratio	1:1	$2^{1/6}:1$	$2^{1/3}:1$	$2^{5/12}:1$	$2^{7/12}:1$	$2^{3/4}:1$	$2^{11/12}:1$	2:1
Cents	0	200	400	500	700	900	1,100	1,200

ในระบบ 12 equal temperament นี้ semitone จะมีความกว้าง = 100 เซ็นต์ พอดี สอดคล้องกับแนวคิดการแบ่งช่วงทบออกเป็น 12 ส่วนเท่าๆ กันแต่จะไม่มีคู่เสียงใดเลยที่มีอัตราส่วนที่สมบูรณ์ (pure intervals) ที่ฟังแล้วเกิดความกลมกลืนอย่างที่สุดอย่างใน Pythagorean tuning หรือ Just Tuning ดนตรีที่ประพันธ์สำหรับระบบเช่นนี้สามารถย้ายบันไดเสียงได้โดยอิสระ เพราะไม่ว่าจะย้ายไปที่ใดความสัมพันธ์ระหว่างตัวโน้ตต่างๆ ในเพลงจะยังคงเดิมทำให้เพลงฟังดูเหมือนเดิมในทุกๆ คีย์

ระบบการเทียบเสียงเช่นนี้เป็นระบบที่ได้รับความนิยมมากที่สุดในปัจจุบันเห็นได้จากเครื่องดนตรีโดยเฉพาะประเภทที่มีระดับเสียงแน่นอน (fixed pitch instrument) นั้นถูกสร้างขึ้นภายใต้หลักการของ 12 Equal Temperament นี้ แม้ว่าจะไม่ชัดเจนว่าใครเป็นผู้ค้นพบหลักการนี้แต่มีการพบ $\sqrt[12]{2}$ อยู่ในงานเขียนของ Stevin (Simon Stevin นักฟิสิกส์และนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสในยุคเรอเนสซองส์) ตั้งแต่ประมาณปี 1600 แล้ว (Sadie, Stanley, and Tyrrell, 2001, p. 253)

บทสรุป

นอกจากระบบ 12 Equal Temperament Tuning แล้ว ตัวโน้ตทั้ง 12 ตัวใน tuning ต่างๆ นั้น มิได้อยู่ห่างกันเป็นระยะที่เท่าๆ กันอย่างแท้จริง ทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวโน้ต (pitch) ทั้งหลายในเพลงเพลงหนึ่งมีลักษณะเฉพาะ และความสัมพันธ์ระหว่าง pitch นี้จะเปลี่ยนไปเมื่อย้ายเพลงไปเล่นในบันไดเสียงอื่น คู่เสียงที่เคยฟังกลมกลืนในบันไดเสียงหนึ่งอาจฟังดูกลมกลืนน้อยลงหรือกระด้างในอีกบันไดเสียงหนึ่ง เพลงจึงมีบุคลิกที่แตกต่างกันไปในแต่ละคีย์ สิ่งนี้เรียกว่า key color นักประพันธ์ในสมัยก่อนทราบเรื่องนี้เป็นอย่างดี จึงเลือกใช้ตัวโน้ตและขั้นคู่ที่ทำให้เกิดผลทางอารมณ์อย่างที่ผู้ประพันธ์ต้องการ

ฉะนั้น นอกจากการประพันธ์แล้วนักประพันธ์ยังต้องคิดถึงเรื่อง Key coloration อีกด้วย เช่นเพลง Canon in D เมื่อเล่นในบันไดเสียง D major (ด้วยเครื่องดนตรีที่เทียบเสียงแบบเดียวกับเครื่องดนตรีของผู้ประพันธ์) จึงจะได้ยินการประสานเสียงตรงตามที่ผู้ประพันธ์ต้องการ นอกจากคู่แปด 2/1 แล้ว 12 Equal Temperament Scale ไม่มีขั้นคู่ใดเลยที่มีอัตราส่วนที่สมบูรณ์ (pure intervals) เนื่องจากต้องปรับตัวโน้ตทุกตัวของบันไดเสียงให้มีระยะห่างที่เท่ากันทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวโน้ตไม่เปลี่ยนแปลงแม้จะย้ายไปเล่นในคีย์อื่น จึงมีความสะดวกสำหรับดนตรีในโลกสมัยใหม่ แต่หากนำเครื่องดนตรีในระบบ 12 equal temperament ไปบรรเลงเพลงที่ประพันธ์ขึ้นสำหรับการเทียบเสียงแบบอื่นแล้วแม้ว่าจะฟังเป็นเพลงก็ตาม แต่จะขาดโอกาสในการนำเสนอความสามารถในเรื่อง Key coloration ของผู้ประพันธ์ซึ่งเป็นเรื่องที่นักดนตรีและนักประพันธ์ควรพิจารณา

เอกสารอ้างอิง

Barbour, James Murray. **Tuning and temperament: A historical survey**. Courier Corporation, 2004.

Benson, David J. **"Music: a mathematical offering."** **The Mathematical Intelligencer** 30.1, 2008.

Benward & Saker. **Music: In Theory and Practice**, Vol. I, Seventh Edition, 2003.

Cary, Tristram. **Dictionary of musical technology**. Greenwood Publishing Group Inc., 1995.

Hoppin, Richard H. **Medieval Music**, New York, NY: W. W. Norton, 1978.

Sadie, Stanley, and John Tyrrell. **Dictionary of Music and Musicians**. New York: Oxford University Press. Yónatan Sánchez, 2001.

Scholes, Percy Alfred, and John Owen Ward. **The Oxford companion to music**. Vol. 9. London: Oxford University Press, 1970.

Sethares, William A. **Tuning, Timbre, Spectrum, Scale.** Springer Science & Business Media, 2005.