การสืบค้นสมบัติของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ โดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต
Preservice Mathematics Teachers Discovering Properties of Triangles in Hyperbolic Geometry through Dynamic Geometry Software

จารุวรรณ สิงห์ม่วง
ผู้ช่วยศาสตราจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏราชนครินทร์

Abstract

The purpose of this study was to have preservice mathematics teachers to explore the important properties of triangles in hyperbolic geoemtry using the Dynamic Geometry Software (DGS). The participants were comprised 40 preservice mathematics teachers who enrolled in the Foundations of Geometry course during the second semester of the 2015 academic year. The instruments were activity packages exploring properties of triangles in hyperbolic geometry using DGS. The results indicated that most of the preservice mathematics teachers could make conjectures and verify properties of triangles in hyperbolic geoemtry correctly and rapidly. The use of DGS can help students visualize this abstract geometry.

Keywords : hyperbolic geometry, Poincaré disk model, Dynamic Geometry Software

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการสืบค้นสมบัติสำคัญของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาด้วยซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชารากฐานเรขาคณิต ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 จำนวน 40 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ ชุดกิจกรรมสำรวจสมบัติของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต จำนวน 6 ชุด หลังจากที่กลุ่มตัวอย่างได้สืบค้นสมบัติของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต ผลปรากฏว่า การให้นักศึกษาสืบค้นสมบัติต่างๆ ของรูปสามเหลี่ยมโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัตนั้นเป็นไปได้ นักศึกษาส่วนใหญ่สามารถตั้งข้อความคาดการณ์และตรวจสอบความนั้นได้ถูกต้องและรวดเร็ว ดังนั้น การใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัตช่วยให้นักศึกษามองเห็นภาพที่เป็นนามธรรมของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาได้ลึกซึ้งยิ่งขึ้น

คำสำคัญ : เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา แบบจำลองของปวงกาเร ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

เรขาคณิตเป็นสาขาวิชาที่เก่าแก่ของคณิตศาสตร์ "เรขาคณิต" ตรงกับคำในภาษาอังกฤษคือ "geometry" ซึ่งมาจากคำภาษากรีก คือ "geometrien" เป็นคำผสมระหว่าง "geo: earth" แปลว่า "โลก" และ "metrien: to measure" ซึ่งแปลว่า "การวัด" (Dunham, 1994, p. 75; Greenberg, 1993, p. 6; Stahl, 2003, p. 29) ดังนั้น ตามตัวอักษรแล้ว "geometry" คือ "การวัดโลก: earth measure" (Smart, 1998, p. 1) ถึงแม้ว่าความหมายตามตัวอักษรของเรขาคณิตจะแคบเกินไป แต่แนวคิดในเรื่องการวัดโลกก็มีความสำคัญมากในสมัยโบราณ ในยุคก่อนการพัฒนาเรขาคณิตของชาวกรีก การนำเรขาคณิตไปประยุกต์ใช้และปฏิบัติจริงของชาวอียิปต์ ชาวบาบิโลเนียนและชาวจีน ส่วนใหญ่เป็นเรื่องเกี่ยวกับการวัด และการพิสูจน์ที่ไม่ยุ่งยากซับซ้อน (Smart, 1998, p. 1) เรขาคณิตเป็นสาขาที่เด่นในคณิตศาสตร์ของกรีกมากกว่า 20 ศตวรรษ (Cederberg, 2001, p. 13)

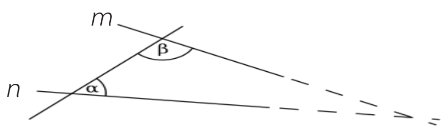
การเรียนการสอนเรขาคณิตในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาของไทยจะเรียนเรขาคณิตแบบยุคลิด จึงทำให้ผู้เรียนส่วนใหญ่มีความเข้าใจว่ามีเรขาคณิตเพียงระบบเดียวเท่านั้น คือ เรขาคณิตแบบยุคลิด สำหรับเรขาคณิตนอกแบบ ยุคลิดจะมีการเรียนในระดับอุดมศึกษาสำหรับผู้เรียนสาขาวิชาคณิตศาสตร์หรือการสอนคณิตศาสตร์เท่านั้น ในระดับอุดมศึกษา เรขาคณิตนับว่าเป็นสาขาที่ยากสำหรับผู้เรียนส่วนใหญ่ เนื่องจากผู้เรียนจะต้องให้เหตุผลโดยใช้สัจพจน์มากกว่าการใช้ประสบการณ์ที่ไม่เป็นแบบแผน นอกจากนี้ ผู้เรียนที่เข้าสู่ระดับอุดมศึกษาจะมีประสบการณ์เกี่ยวกับสัจพจน์ของเรขาคณิตแบบยุคลิด ซึ่งความเข้าใจเกี่ยวกับรูปร่างและความสัมพันธ์ระหว่างรูปร่างเหล่านั้นจะถูกท้าทายเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงสัจพจน์ (Smith, Hollebrands, Iwancio, & Kogan, 2007, p. 613) โดยทั่วไป เรขาคณิตจะเกี่ยวข้องกับการมองภาพซึ่งจะมีข้อจำกัดสำหรับผู้เรียนในการเขียนแผนภาพลงบนกระดาษ โดยเฉพาะเมื่อต้องศึกษาเกี่ยวกับเรขาคณิตนอกแบบยุคลิด ผู้เรียนอาจจะวาดแผนภาพที่ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนและส่งผลให้ตั้งข้อความคาดการณ์ที่ไม่ถูกต้อง หรือผู้เรียนอาจจะวาดแผนภาพที่ถูกต้องแต่เป็นกรณีเฉพาะเกินไป ซึ่งจะบดบังความสามารถในการสรุปนัยทั่วไปหรือการพิสูจน์ที่สูงกว่าภาพที่วาด (Schoenfeld, 1986, pp. 225–264)

เรขาคณิตนอกแบบยุคลิด

ยุคลิด นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกเป็นผู้ที่ริเริ่มพัฒนาเรขาคณิตให้เป็นระบบโดยใช้สัจพจน์ เรขาคณิตแบบยุคลิด ประกอบด้วยสัจพจน์ 5 ข้อ ดังนี้

1. ลากเส้นตรงเส้นหนึ่งจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งได้
2. ต่อเส้นตรงที่ยาวจำกัดออกไปได้เรื่อยๆ
3. เขียนวงกลมได้เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและระยะทาง (รัศมี) ให้
4. มุมฉากทุกมุมเท่ากัน
5. ถ้าลากเส้นตรงผ่านเส้นตรงสองเส้น ทำให้มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันรวมกันน้อยกว่าสองมุมฉากแล้ว เส้นตรงสองเส้นนั้นจะตัดกันทางด้านที่มีผลรวมน้อยกว่า สองมุมฉาก ถ้าต่อเส้นตรงสองเส้นนั้นออกไปเรื่อยๆ

แผนภาพอธิบายสัจพจน์ที่ 5 แสดงดังภาพที่ 1

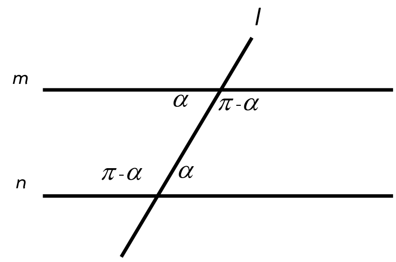


ภาพที่ 1 เส้นตรง *m* และเส้นตรง *n* ไม่ขนานกัน

ภาพที่ 1 แสดงสถานการณ์ที่อธิบายสัจพจน์ที่ 5 ของยุคลิด ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อเส้นตรงสองเส้นไม่ขนานกัน

ถ้า $\alpha + \beta < \pi$ ดังนั้นเส้นตรง *m* และเส้นตรง *n* จะตัดกันที่จุดใดจุดหนึ่งทางด้านขวามือ

ถ้าเส้นตรง *m* และเส้นตรง *n* ไม่ตัดกัน ดังนั้น $\alpha + \beta = \pi$ นั่นคือ ถ้าเส้นตรง *m* และเส้นตรง *n* ขนานกันแล้ว $\alpha + \beta$ จะเป็นมุมตรงและมุมที่เกิดขึ้นจากเส้นตรง *m* เส้นตรง *n* และเส้นตรง *l* แสดงดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 เส้นตรง *m* และเส้นตรง *n* ขนานกัน

นักคณิตศาสตร์ให้การยอมรับสัจพจน์สี่ข้อแรกของเรขาคณิตแบบยุคลิด แต่สำหรับสัจพจน์ที่ 5 นั้นกลับมีความเห็นที่ขัดแย้งกัน สัจพจน์ที่ 5 ของเรขาคณิตแบบยุคลิดมีข้อความที่ยาวและซับซ้อนมากกว่าสัจพจน์ข้ออื่น นักคณิตศาสตร์หลายท่านจึงมีความเห็นว่าสัจพจน์ที่ 5 น่าจะเป็นทฤษฎีบทมากกว่าเป็นสัจพจน์ และได้พยายามพิสูจน์ว่าสัจพจน์ที่ 5 เป็นทฤษฎีบทที่พิสูจน์ได้จากสัจพจน์ข้ออื่น แต่ก็ไม่มีท่านใดสามารถพิสูจน์ได้ ดังนั้นนักคณิตศาสตร์รุ่นหลังจึงยอมรับว่า การที่ยุคลิดกำหนดให้สัจพจน์ที่ 5 เป็นสัจพจน์เป็นสิ่งที่ถูกต้องแล้ว อย่างไรก็ตาม ความพยายามของนักคณิตศาสตร์ที่จะพิสูจน์สัจพจน์ที่ 5 ไม่ได้สูญเปล่า เพราะก่อให้เกิดการค้นพบเรขาคณิตประเภทอื่น เมื่อเปลี่ยนแปลงสัจพจน์บางข้อ เรขาคณิตนอกแบบยุคลิด (non–Euclidean geometry) เป็นตัวอย่างหนึ่งของเรขาคณิตแนวใหม่ที่มีเซตของสัจพจน์แตกต่างไปจากสัจพจน์ของเรขาคณิตแบบยุคลิด ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตนอกแบบยุคลิดสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์และศาสตร์ด้านอื่นๆ เช่น ไอน์สไตน์นักฟิสิกส์ที่ยิ่งใหญ่ได้ประยุกต์ใช้เรขาคณิตนอกแบบยุคลิดในการสร้างแบบจำลองที่เหมาะสม ในทฤษฎีสัมพัทธภาพที่มีชื่อเสียงของท่าน

เนื่องจากข้อความยาวและซับซ้อนมากกว่าสัจพจน์ ข้ออื่นๆ จึงทำให้สัจพจน์ที่ 5 นี้ไม่เป็นที่พึงใจของนักคณิตศาสตร์มาเป็นเวลากว่า 2,000 ปี และยุคลิดก็ไม่ค่อยได้ใช้พิสูจน์ ในทฤษฎีบทอื่นนอกจากในทฤษฎีบทที่ 29 ซึ่งเป็นทฤษฎีบทของเส้นขนาน ดังนั้นจึงมักมีผู้เรียกสัจพจน์ที่ 5 ว่า สัจพจน์ เส้นขนาน (parallel postulate) นักคณิตศาสตร์หลายท่านพยายามพิสูจน์ว่าสัจพจน์ที่ 5 เป็นทฤษฎีบทที่พิสูจน์ได้จากสัจพจน์ข้ออื่นๆ แต่ก็ไม่มีท่านใดสามารถพิสูจน์ได้ ต่อมามีผู้ใช้หลักเกณฑ์ของระบบเชิงสัจพจน์ตรวจสอบความเป็นอิสระของสัจพจน์ที่ 5 ด้วยการนำข้อความที่ขัดแย้งกับสัจพจน์ที่ 5 ใส่แทนที่สัจพจน์ที่ 5 ในระบบเรขาคณิตแบบยุคลิด ปรากฏว่าสามารถหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ แสดงว่าระบบใหม่ ที่ได้มีความต้องกัน ทำให้ทราบว่าสัจพจน์ที่ 5 เป็นสัจพจน์อิสระ ไม่ใช่เป็นผลที่ได้จากสัจพจน์ข้ออื่นๆ ซึ่งความพยายามพิสูจน์สัจพจน์ข้อนี้มีบทบาทในการพัฒนาเรขาคณิตนอกแบบยุคลิด

เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา

นักคณิตศาสตร์จำนวนมากพยายามพิสูจน์สัจพจน์ที่ 5 (สัจพจน์เส้นขนาน) ของเรขาคณิตแบบยุคลิดด้วยการสร้างนิเสธของสัจพจน์เส้นขนานขึ้นมาแล้วพยายามพิสูจน์ให้เกิดข้อขัดแย้งกัน ถึงแม้ว่าความพยายามของนักคณิตศาสตร์เหล่านั้นจะไม่ประสบผลสำเร็จ แต่ความอุตสาหะของท่านเหล่านั้นกลับก่อให้เกิดเรขาคณิตนอกแบบยุคลิดประเภทหนึ่ง คือ เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีประโยชน์อย่างมากต่อการพัฒนาสาขาต่างๆ ของคณิตศาสตร์ระดับสูง และสาขาเฉพาะด้านวิทยาศาสตร์ เช่น การทำนายวงโคจรของวัตถุ การเดินทางในอวกาศ และทางด้านดาราศาสตร์

ในช่วงศตวรรษที่ 19 พบว่ามีการค้นคว้าเกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาอย่างมาก ผู้ค้นพบเรขาคณิต เชิงไฮเพอร์โบลาเป็นท่านแรกคือ นิโคไล โลบาเชฟสกี (Nikolai Lobachevsky, ค.ศ. 1793–1856) นักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย นอกจากนี้ คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Carl Friedrich Gauss, ค.ศ. 1777–1855) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันก็ได้ศึกษาเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาเช่นเดียวกัน ในปี ค.ศ. 1868 เออูเจนีโอ เบลตรามี (Eugenio Beltrami, ค.ศ. 1835–1900) นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาเลียนได้เสนอแบบจำลองของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา และใช้แบบจำลองนี้พิสูจน์ว่าเรขาคณิต เชิงไฮเพอร์โบลาจะมีความต้องกันถ้าเรขาคณิตแบบยุคลิด มีความต้องกัน ในปี ค.ศ. 1861 เฟลิกซ์ ไคลน์ (Felix Klien, ค.ศ. 1849–1925) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ได้กำหนดชื่อเรขาคณิตชนิดนี้ว่า “เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา”

สัจพจน์บ่งลักษณะของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา

การพัฒนาเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลามีพื้นฐานอยู่บนข้อตกลงเบื้องต้นและคำอนิยามของเรขาคณิตแบบยุคลิด แนวใหม่ และการแทนสัจพจน์ที่ 5 หรือสัจพจน์เส้นขนานของยุคลิดด้วยสัจพจน์บ่งลักษณะ (characteristic postulate) ของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา

สัจพจน์ 5 ข้อในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา มีดังนี้

1. ลากเส้นตรงเส้นหนึ่งจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งได้
2. ต่อเส้นตรงที่ยาวจำกัดออกไปได้เรื่อยๆ
3. เขียนวงกลมได้เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลางและระยะทาง (รัศมี) ให้
4. มุมฉากทุกมุมเท่ากัน
5. ลากเส้นผ่านจุดหนึ่งที่ไม่อยู่บนเส้นกำหนดให้ โดยไม่ตัดเส้นกำหนดให้ ได้มากกว่า 1 เส้น

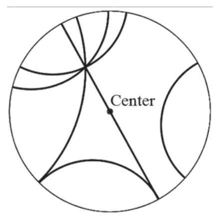
เนื่องจาก ทฤษฎีบท 28 บทแรกของยุคลิด ไม่เกี่ยวข้องกับสัจพจน์เส้นขนาน ดังนั้นทฤษฎีบททั้ง 28 บทนั้นสามารถนำมาใช้ในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาได้

แบบจำลองของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา

ความยุ่งยากของการมองภาพเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาในโลกแห่งความเป็นจริงเกิดขึ้น เนื่องจากคนส่วนใหญ่จะมองในแบบยุคลิด จึงก่อให้เกิดความยุ่งยากเพิ่มมากขึ้น แบบจำลองของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาที่นิยมใช้เป็นสื่อในการช่วยให้มองเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาได้เข้าใจยิ่งขึ้น คือ แบบจำลองของปวงกาเร (Poincaré Disk Model)

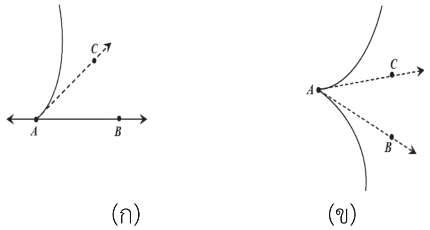
แบบจำลองของปวงกาเร

ดังนั้น ในแบบจำลองของปวงกาเรสำหรับเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา 2 มิติ จุดจะหมายถึง จุดใดๆ ที่อยู่ภายในบริเวณวงกลมหนึ่งหน่วย (the unit disk) นั่นคือ จุด $P = (x, y)$ ใดๆ ที่ $x^2 + y^2 < 1$ เซตของจุดทั้งหมดเหล่านั้นเรียกว่า จานของปวงกาเร (Poincaré Disk) เส้นในเรขาคณิตชนิดนี้ จะแตกต่างจากเส้นแบบยุคลิด นั่นคือ เส้นไฮเพอร์โบลิกหรือเส้นปวงกาเร (hyperbolic line หรือ Poincaré line) หมายถึงส่วนโค้งแบบยุคลิด หรือส่วนของเส้นตรงแบบยุคลิดที่อยู่ภายในจานของปวงกาเร และตัดกับขอบของวงกลมเป็นมุมฉาก ดังนั้นจะมีเส้น 2 ประเภทในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา ดังภาพที่ 3



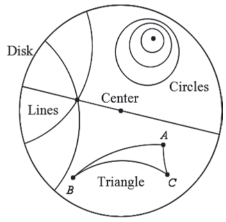
ภาพที่ 3 เส้น 2 ประเภท ในแบบจำลองแบบจานของปวงกาเร

สำหรับมุมระหว่างเส้น 2 เส้น จะวัดด้วยการวัดมุมระหว่างเส้นสัมผัสเส้น ดังภาพที่ 4(ก) และ 4(ข)



ภาพที่ 4 มุมระหว่างส่วนโค้ง 2 เส้น หรือส่วนโค้งกับเส้น

รูปเรขาคณิตในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาส่วนมากนิยามเช่นเดียวกับเรขาคณิตแบบยุคลิด ตัวอย่างเช่นรูปสามเหลี่ยมยังคงนิยามว่าเป็นส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดสามจุด *A, B,* และ *C* ที่ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และเขียนแทนด้วย *DABC* รูปเรขาคณิตในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา แสดงดังภาพที่ 5



ภาพที่ 5 รูปเรขาคณิตชนิดต่างๆ ในจานของปวงกาเร

นักการศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ นักวิจัย และองค์กรวิชาชีพต่างๆ ได้เสนอให้มีการนำซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ เช่น Geometer's Sketchpad, GeoGebra, Cabri, Geometry Explorer มาช่วยในการสอนเรขาคณิต ซึ่งซอฟต์แวร์เหล่านี้จะช่วยให้ผู้เรียนสร้างรูปที่ถูกต้อง สมบัติ “การลาก” ของซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัตเหล่านี้ได้แยกซอฟต์แวร์นี้ออกจากซอฟต์แวร์อื่นอย่างเด่นชัด (Goldenberg & Couco, 1998, pp. 351–367) หลังจากที่มีการสร้างรูปเรขาคณิตเสร็จแล้ว ผู้เรียนสามารถลากส่วนประกอบต่างๆ ของรูป ไป-มาได้ ซึ่งลักษณะเช่นนี้จะเปิดโอกาสให้ผู้เรียนสืบเสาะความจริงของข้อความคาดการณ์ได้อย่างง่ายดายและรวดเร็ว ยิ่งไปกว่านั้น ซอฟต์แวร์ประเภทนี้ยังอำนวยความสะดวกในการสำรวจ ซึ่งช่วยส่งเสริมกระบวนการคาดการณ์ ซอฟต์แวร์เหล่านี้จะช่วยให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนรู้เรขาคณิตแบบยุคลิดและนอกแบบยุคลิดด้วยการสำรวจ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัตพบว่า ซอฟต์แวร์ประเภทนี้ช่วยพัฒนาความเข้าใจมโนมติทางเรขาคณิต และการพิสูจน์ที่เป็นแบบแผน (Groman, 1996; Singmuang & Phahanich, 2004; Laborde, Kynigos, Hollenbrands & Straesser, 2006; Smith, Hollebrands, Iwancio, & Kogan, 2007; Myers, 2009; Kurtuluş & Ada, 2011; Singmuang, 2013; Lorsong & Singmuang, 2015; Singmuang, 2016; Sebial, 2017; Singmuang, 2018) ถึงแม้ว่าจะมีการพัฒนาซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ขึ้นมาเพื่อช่วยให้ผู้เรียนได้สืบค้นเนื้อหาต่างๆ ในเรขาคณิตนอกแบบยุคลิดมากมาย เช่น Geometers' sketchpad, NonEuclid, GeoGebra, Cabri, แต่ยังมีงานวิจัยเป็นจำนวนน้อยที่ศึกษาเกี่ยวกับการที่ผู้เรียนใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต Geometry Explorer สืบค้นสมบัติที่สำคัญของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา จึงทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาวิจัยในเรื่องนี้ ซึ่งประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับคือแนวคิดเกี่ยวกับสถานการณ์การเรียนรู้ที่มีเทคโนโลยีเป็นฐานเพื่อใช้ในการออกแบบ การจัดการเรียนการสอนเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการสืบค้นสมบัติสำคัญของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาด้วยซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต

วิธีดำเนินการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชารากฐานเรขาคณิต ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 มหาวิทยาลัยราชภัฏราชนครินทร์ จังหวัดฉะเชิงเทรา จำนวน 2 ห้องเรียน มีนักศึกษาจำนวน 81 คน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชารากฐานเรขาคณิต ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 มหาวิทยาลัยราชภัฏราชนครินทร์ จังหวัดฉะเชิงเทรา จำนวน 1 ห้องเรียน มีนักศึกษาจำนวน 40 คน ซึ่งได้มาโดยการสุ่มแบบแบ่งชั้น (Cluster Random Sampling) เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยเป็นชุดกิจกรรมสำรวจจำนวน 6 ชุด ที่ให้นักศึกษาใช้ซอฟต์แวร์ Geometry Explorer สำรวจสมบัติที่สำคัญ 6 ประการของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา ซึ่งได้ผ่านการตรวจสอบจากผู้ทรงคุณวุฒิ และทดลองใช้กับนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชารากฐานเรขาคณิต ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง สมบัติสำคัญของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลามีดังนี้

1. ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากน้อยกว่า 180°

2. ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใดๆ น้อยกว่า 180°

3. ความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม สั้นกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สาม หรือความยาวของด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยมจะยาวมากกว่าสองเท่าของความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้าน

4. เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมจะตั้งฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกที่เป็นมุมประชิด

5. ผลบวกของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมจะเท่ากับ 360°

6. ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดมากกว่าผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

สรุปผลการวิจัย

หลังจากที่นักศึกษาได้ศึกษามโนมติพื้นฐานของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา เช่น จุด เส้นตรง ส่วนของเส้นตรง วงกลม สัจพจน์ทั้ง 5 ข้อ การใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต Geometry Explorer และทบทวนเกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตแบบยุคลิดโดยใช้ซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ดังต่อไปนี้

1. ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเท่ากับ 180°

2. ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใดๆ เท่ากับ 180°

3. ความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม เท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สาม หรือความยาวของด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยมยาวเป็นสองเท่าของความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้าน

4. เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมตั้งฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกที่เป็นมุมประชิด

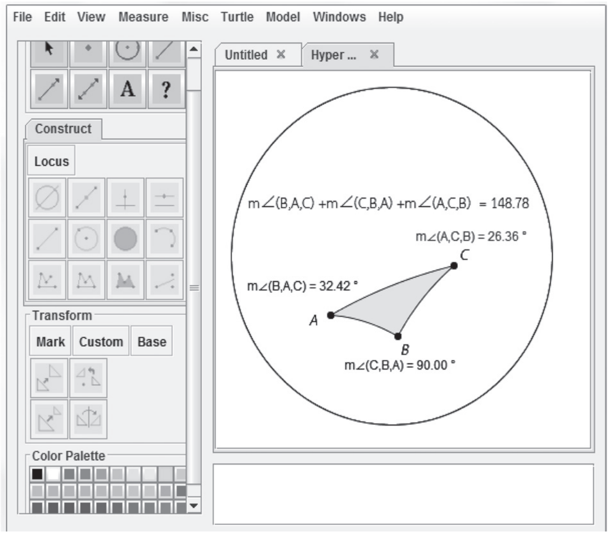
5. ผลบวกของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 360°

6. ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

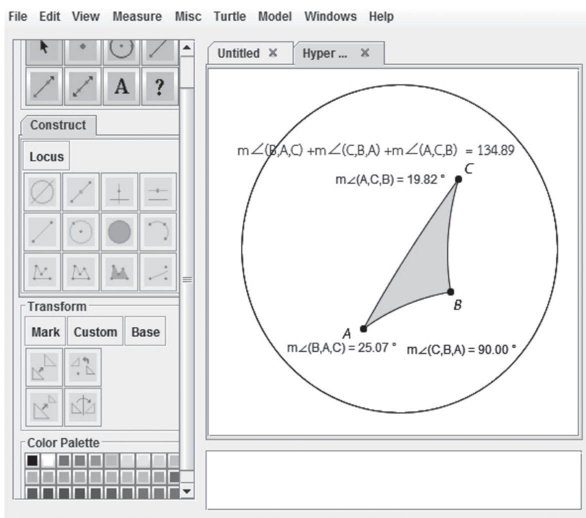
หลังจากนั้น นักศึกษาได้เริ่มสำรวจสมบัติต่างๆ ของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต Geometry Explorer ซึ่งปรากฏผลดังต่อไปนี้

การสำรวจ 1 : ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากน้อยกว่า 180°

นักศึกษาสืบค้นสมบัตินี้ด้วยการวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก *ABC* โดยให้มุม *B* เป็นมุมฉาก วัดขนาดของมุมภายในทั้งสามมุม คือ มุม *ABC* มุม *ACB* และมุม *BAC* รวมทั้งหาผลบวกของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก *ABC* และสังเกตความแตกต่างของผลบวกจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่างๆ โดยการโยกจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปแรกไป-มา แล้วพิจารณาผลบวกของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก *ABC* ว่ามีแนวโน้มเท่ากับเท่าไร โดยเปรียบเทียบกับผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม มุมฉากในเรขาคณิตแบบยุคลิด นักศึกษาสังเกตด้วยการดำเนินการตามข้อแนะนำ ในช่วงเวลาสั้นๆ นักศึกษาส่วนใหญ่ สามารถสรุปได้ว่า ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากน้อยกว่า 180° ตัวอย่างจากหน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ปรากฏดังภาพที่ 5(ก) และ 5(ข)



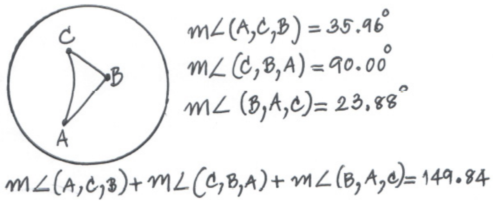
(ก)



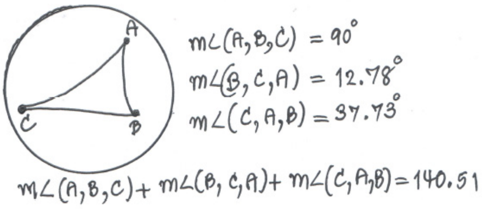
(ข)

ภาพที่ 5 หน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ที่แสดงว่าผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากน้อยกว่า 180°

จากการสังเกตและตรวจสอบจากใบกิจกรรม นักศึกษาตรวจสอบข้อความคาดการณ์ด้วยการสังเกตจากรูปสามเหลี่ยมหลายๆ รูป และวาดรูปที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ของตนเอง ตัวอย่างดังภาพที่ 6(ก) และ 6(ข)



(ก)

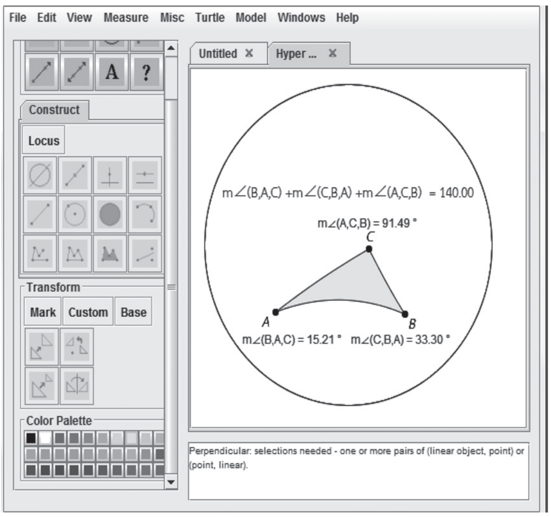


(ข)

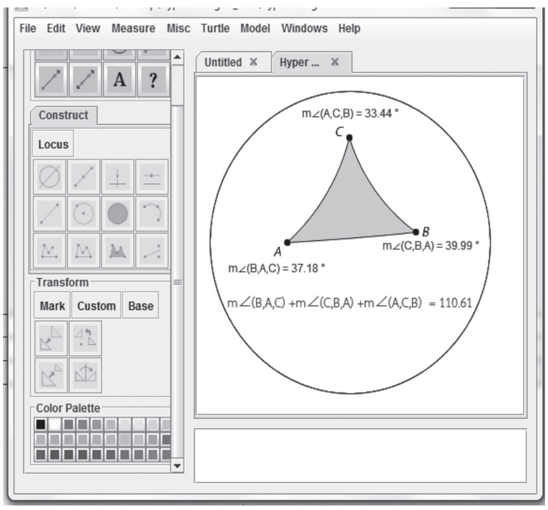
ภาพที่ 6 แผนภาพจากใบกิจกรรมของนักศึกษาที่ใช้แสดงว่าผลบวกของมุมภายในสามเหลี่ยมมุมน้อยกว่า 180°

การสำรวจ 2 : ผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมใดๆ จะน้อยกว่า 180°

นักศึกษาสืบค้นสมบัติโดยวาดรูปสามเหลี่ยม *ABC* ใดๆ วัดขนาดของมุมภายในทั้งสามมุม คือ มุม *ABC* มุม *ACB* และมุม *BAC* รวมทั้งหาผลบวกของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยม *ABC* และสังเกตความแตกต่างของผลบวกจากรูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ โดยการโยกจุดยอดมุมของรูปสามเหลี่ยม รูปแรกไปมา แล้วพิจารณาผลบวกของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยม *ABC* ว่ามีแนวโน้มเท่ากับเท่าไร โดยการเปรียบเทียบกับผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตแบบยุคลิด นักศึกษาสังเกตด้วยการดำเนินการตามข้อแนะนำ ในช่วงเวลาสั้นๆ นักศึกษาส่วนใหญ่สามารถสรุปได้ว่า ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใดๆ น้อยกว่า 180° ตัวอย่างจากหน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ปรากฏดังภาพที่ 7(ก) และ 7(ข)



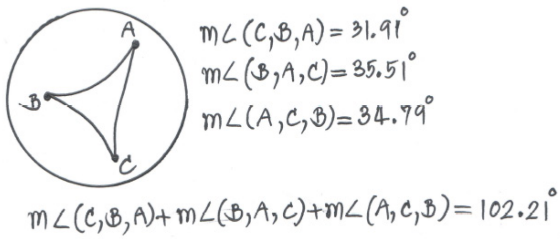
(ก)



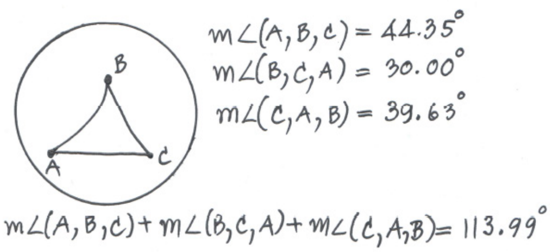
(ข)

ภาพที่ 7 หน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ที่แสดงว่าผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากน้อยกว่า 180°

จากการสังเกตและตรวจสอบจากใบกิจกรรม นักศึกษาตรวจสอบข้อความคาดการณ์ด้วยการสังเกตจากรูปสามเหลี่ยมหลายๆ รูป และวาดรูปที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ของตนเอง ตัวอย่างดังภาพที่ 8(ก) และ 8(ข)



(ก)

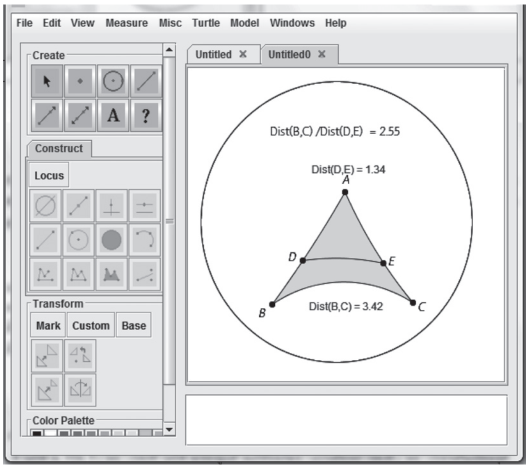


(ข)

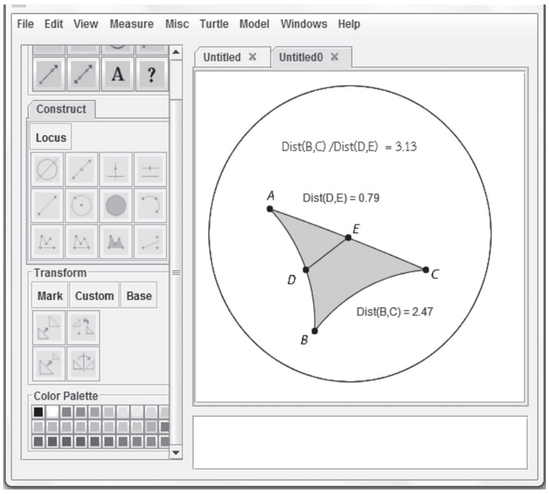
ภาพที่ 8 แผนภาพจากใบกิจกรรมของนักศึกษา ที่แสดงว่า ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใดๆ น้อยกว่า 180°

การสำรวจ 3 : ความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมสั้นกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สามหรือความยาวของด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยมยาวมากกว่าสองเท่าของความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้าน

นักศึกษาสืบค้นสมบัติโดยวาดรูปสามเหลี่ยม *ABC* ใดๆ สร้างจุดกึ่งกลางของด้าน *AB* และ *AC* ที่จุด *D* และ *E* ตามลำดับ สร้างส่วนของเส้นตรง *DE* แล้ววัดระยะ *DE* และ *BC* แล้วเปรียบเทียบความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม *ABC* (ระยะ *DE*) กับความยาวของด้านที่สาม (ด้าน *BC*) นักศึกษาสังเกตด้วยการดำเนินการตามข้อแนะนำ นักศึกษาส่วนใหญ่สามารถสรุปได้ว่า ความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมสั้นกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สาม หรือ ความยาวของด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยมยาวมากกว่าสองเท่าของความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้าน ตัวอย่างจากหน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ปรากฏดังภาพที่ 9(ก) และ 9(ข)



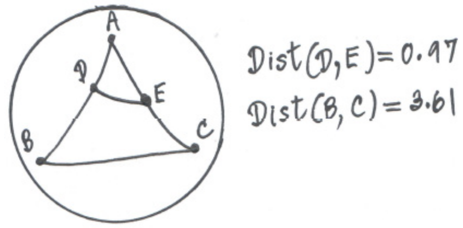
(ก)



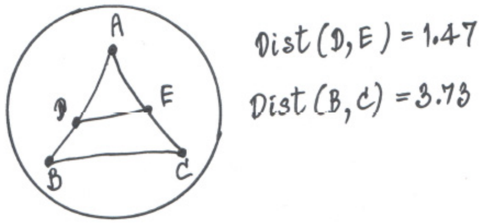
(ข)

ภาพที่ 9 หน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ที่แสดงว่าความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมสั้นกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สาม หรือความยาวของด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยมจะยาวเป็นสองเท่าของความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้าน

จากการสังเกตและตรวจสอบจากใบกิจกรรม นักศึกษาตรวจสอบข้อความคาดการณ์ด้วยการสังเกตจากรูปสามเหลี่ยมหลายๆ รูป และวาดรูปที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ของตนเอง ตัวอย่างดังภาพที่ 10(ก) และ 10(ข)



(ก)

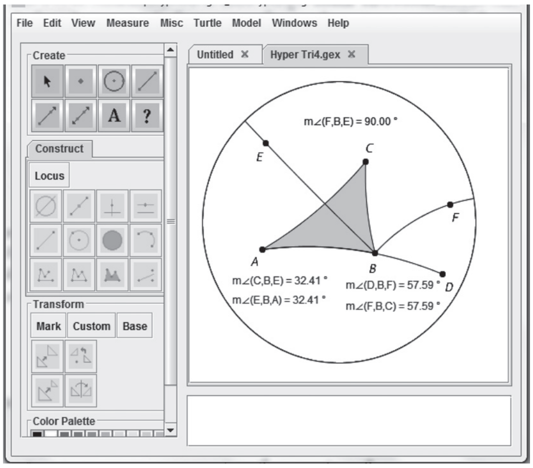


(ข)

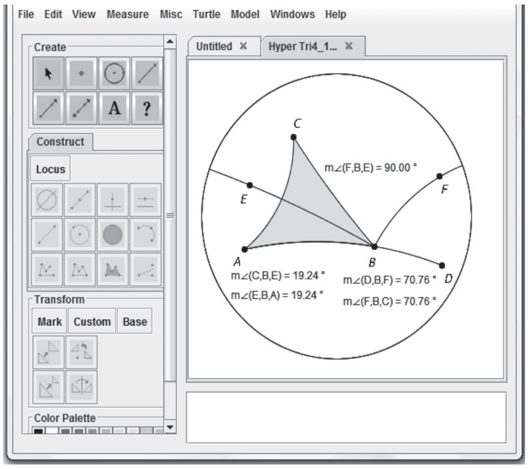
ภาพที่ 10 แผนภาพจากใบกิจกรรมของนักศึกษา ที่ใช้แสดงว่าความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมสั้นกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สาม

การสำรวจ 4 : เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมตั้งฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกที่เป็นมุมประชิด

นักศึกษาสืบค้นสมบัติโดยวาดรูปสามเหลี่ยม *ABC* ใดๆ แบ่งครึ่งมุมภายในของสามเหลี่ยม *ABC* จำนวน 1 มุม สร้างมุมภายนอกที่เป็นมุมประชิดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม *ABC* ข้างต้น แล้วแบ่งครึ่งมุมภายนอกดังกล่าว วัดขนาดของมุมระหว่างเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในและเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกที่สร้างขึ้น แล้วโยกจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไป-มา พิจารณาขนาดของมุมระหว่างเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในละมุมภายนอกที่สร้างขึ้น นักศึกษาสังเกตด้วยการดำเนินการตามข้อแนะนำ ในช่วงเวลาสั้น ๆ นักศึกษาส่วนใหญ่ สามารถสรุปได้ว่า เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมตั้งฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกที่เป็นมุมประชิด ตัวอย่างจากหน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ปรากฏดังภาพที่ 11(ก) และ 11(ข)



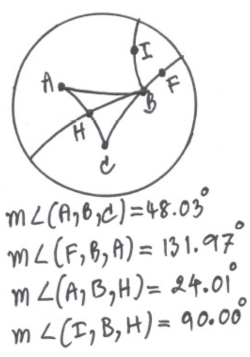
(ก)



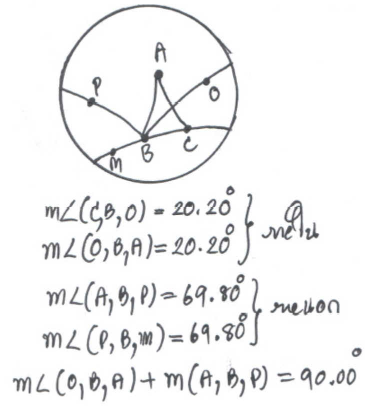
(ข)

ภาพที่ 11 หน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ที่แสดงว่าเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมตั้งฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกที่เป็นมุมประชิด

จากการสังเกตและตรวจสอบจากใบกิจกรรม นักศึกษาตรวจสอบข้อความคาดการณ์ด้วยการสังเกตจากรูปสามเหลี่ยมหลายๆ รูป และวาดรูปที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ของตนเอง ตัวอย่างดังภาพที่ 12(ก) และ 12(ข)



(ก)

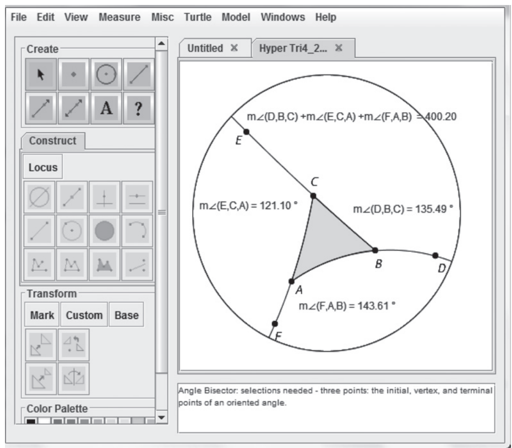


(ข)

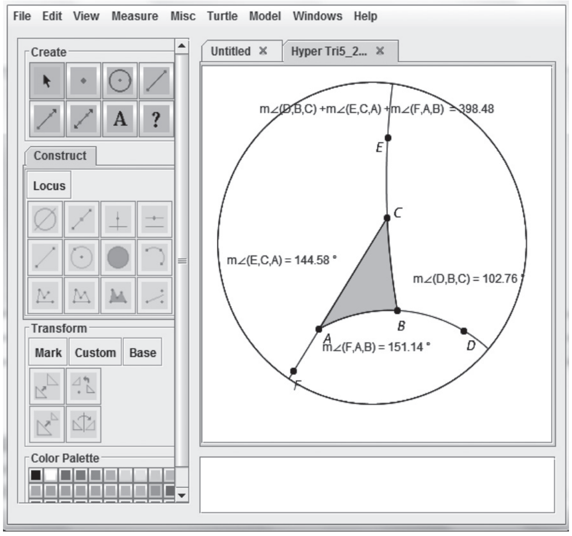
ภาพที่ 12 แผนภาพจากใบกิจกรรมของนักศึกษา ที่ใช้แสดงว่าเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในตั้งฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกที่เป็นมุมประชิด

การสำรวจ 5 : ผลบวกของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมมากกว่า 360°

นักศึกษาสืบค้นสมบัติโดยวาดรูปสามเหลี่ยม *ABC* ใดๆ สร้างมุมภายนอกที่เป็นมุมประชิดของมุม *ABC* มุม *ACB* และมุม *BAC* วัดขนาดของมุมภายนอกทั้งสามมุม แล้วคำนวณหาผลบวกของมุมภายนอกทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยม *ABC* และตรวจสอบสมบัติโดยการโยกจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไป-มา เพื่อพิจารณาผลบวกของมุมภายนอกทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยม *ABC* ว่ามีแนวโน้มเท่ากับเท่าไร โดยเปรียบเทียบกับผลบวกของมุมภายนอกทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยม ในเรขาคณิตแบบยุคลิด นักศึกษาสังเกตด้วยการดำเนินการตามข้อแนะนำ ในช่วงเวลาสั้นๆ นักศึกษาส่วนใหญ่สามารถสรุปได้ว่า ผลบวกของมุมภายนอกทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยม *ABC* ตัวอย่างจากหน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ปรากฏดังภาพที่ 13(ก) และ 13(ข)



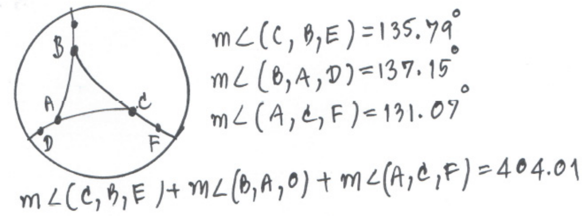
(ก)



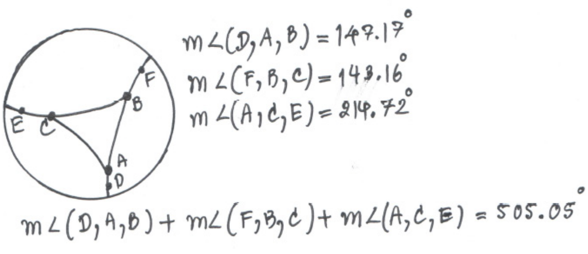
(ข)

ภาพที่ 13 หน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ที่แสดงว่าผลบวกของมุมภายนอกของสามเหลี่ยมมากกว่า 360°

จากการสังเกตและตรวจสอบจากใบกิจกรรม นักศึกษาตรวจสอบข้อความคาดการณ์ด้วยการสังเกตจากรูปสามเหลี่ยมหลายๆ รูป และวาดรูปที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ของตนเอง ตัวอย่างดังภาพที่ 14(ก) และ 14(ข)



(ก)

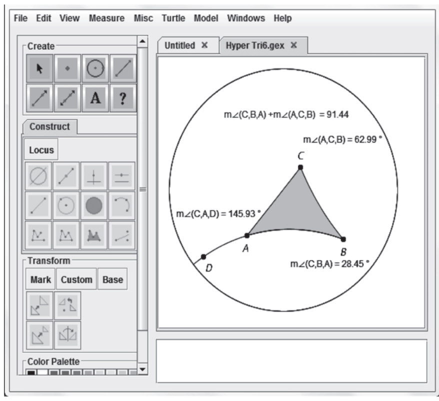


(ข)

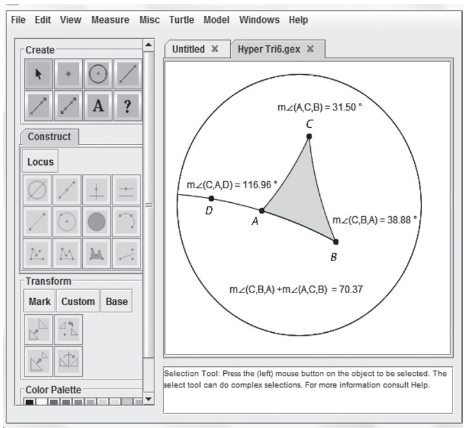
ภาพที่ 14 แผนภาพจากใบกิจกรรมของนักศึกษาที่ใช้แสดงว่าผลบวกของมุมภายนอกของสามเหลี่ยมมากกว่า 360°

การสำรวจ 6 : ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดโตกว่าผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุม ภายนอกนั้น

นักศึกษาสืบค้นสมบัติโดยวาดรูปสามเหลี่ยม *ABC* ใดๆ วัดขนาดของมุมภายใน 2 มุม คือ มุม *ABC* และมุม *ACB* สร้างมุมภายนอกที่เป็นมุมประชิดของมุม *BAC* และวัดขนาดของมุมภายนอก ตรวจสอบสมบัติโดยการโยกจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม *ABC* ไป-มา และพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างผลบวกของมุมภายใน 2 มุม คือ มุม *ABC* และมุม *ACB* กับขนาดของมุมภายนอกที่เป็นมุมประชิดของมุม *BAC* ว่ามีแนวโน้มเป็นอย่างไร โดยให้เปรียบเทียบกับสมบัตินี้ในเรขาคณิตแบบยุคลิด นักศึกษาสังเกตด้วยการดำเนินการตามข้อแนะนำ ในช่วงเวลาสั้นๆ นักศึกษาส่วนใหญ่สามารถสรุปได้ว่า ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดโตกว่าผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น ตัวอย่างจากหน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ปรากฏดังภาพที่ 15(ก) และ 15(ข)



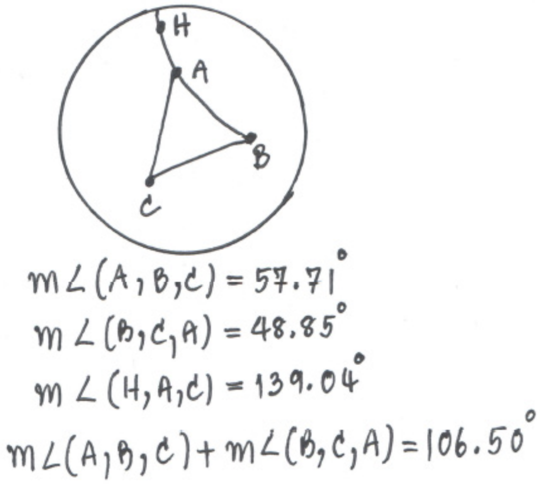
(ก)



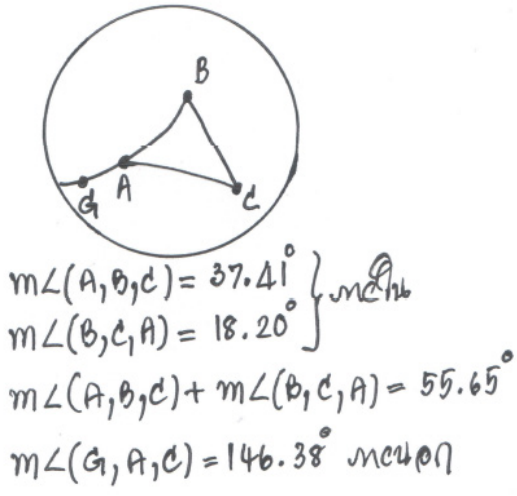
(ข)

ภาพที่ 15 หน้าจอของซอฟต์แวร์ Geometry Explorer ที่แสดงว่าถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดโตกว่าผลบวกของขนาดของมุมภายใน ที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

จากการสังเกตและตรวจสอบจากใบกิจกรรม นักศึกษาตรวจสอบข้อความคาดการณ์ด้วยการสังเกตจากรูปสามเหลี่ยมหลายๆ รูป และวาดรูปที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ของตนเอง ตัวอย่างดังภาพที่ 16(ก) และ 16(ข)



(ก)



(ข)

ภาพที่ 16 แผนภาพจากใบกิจกรรมของนักศึกษา ที่ใช้แสดงว่าถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดโตกว่าผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น

อภิปรายผลการวิจัย

นักศึกษาครูจำนวน 40 คน สืบค้นสมบัติที่สำคัญ 6 ข้อของรูปสามเหลี่ยมในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา ด้วยการที่นักศึกษาแต่ละคนสร้างรูปสามเหลี่ยมบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ของตนเอง และเปรียบเทียบผลที่ได้กับนักศึกษาคนอื่น ซึ่งจะทำให้นักศึกษาได้เห็นตัวอย่างที่แตกต่างกันไป แต่ได้ผลสรุปเดียวกัน ศักยภาพของเรขาคณิตพลวัตในด้านการลากทำให้นักศึกษาสามารถสร้างรูปเรขาคณิตในเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาที่แตกต่างกันได้อย่างรวดเร็ว และเปิดโอกาสให้นักศึกษาได้ตั้งข้อความคาดการณ์และตรวจสอบข้อความคาดการณ์นั้นได้อย่างง่ายและรวดเร็ว นักศึกษาส่วนใหญ่สรุปได้ว่า 1) ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากน้อยกว่า 180° 2) ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใดๆ น้อยกว่า 180° 3) ความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมสั้นกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สาม หรือความยาวของด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยมยาวมากกว่าสองเท่าของความยาวของเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านสองด้าน 4) เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมตั้งฉากกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกที่เป็นมุมประชิด 5) ผลบวกของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมจะเท่ากับ 360° และ 6) ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดมากกว่าผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น ซึ่งการสืบค้นสมบัติเหล่านี้โดยใช้ปากกาและกระดาษจะเป็นไปได้ยากยิ่ง ดังคำกล่าวของ Straesser (2002) ที่กล่าวว่า “ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต (Dynamic Geometry Software) ช่วยทำให้กิจกรรมการสืบค้นที่เป็นไปได้มีมากขึ้น เปิดโอกาสให้มีการสำรวจได้หลากหลายมากกว่าเดิม” และสอดคล้องกับ Guven & Karatas (2009) ที่พบว่าซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัตได้เปลี่ยนห้องเรียนเป็นห้องทดลอง ทำให้นักศึกษาสามารถสำรวจความสัมพันธ์ใหม่และตั้งข้อความคาดการณ์ได้” มากไปกว่านั้นคือ นักศึกษาครูที่รู้จักเฉพาะเรขาคณิตแบบยุคลิดเพียงประเภทเดียวจะได้มีความตระหนักว่ายังมีเรขาคณิตนอกแบบยุคลิด เช่น เรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะทั่วไป

เนื่องจากนักศึกษาสามารถสืบค้นสมบัติของรูปสามเหลี่ยมเชิงไฮเพอร์โบลาโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต Geometry Explorer ดังนั้นในการเรียนการสอนวิชารากฐานเรขาคณิตโดยเฉพาะเรื่องเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลา จึงควรนำซอฟต์แวร์นี้ไปใช้เป็นสื่อประกอบการเรียนการสอน เพื่อให้นักศึกษาสามารถทำความเข้าใจเนื้อหาของเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาได้มากยิ่งขึ้น

ข้อเสนอแนะในการวิจัย

1. ทำการวิจัยในเนื้อหาเรขาคณิตเชิงไฮเพอร์โบลาเพิ่มเติม เช่น สมบัติของรูปสี่เหลี่ยม เป็นต้น

2. ทำการวิจัยในเนื้อหาเรขาคณิตนอกแบบยุคลิดประเภทอื่น เช่น เรขาคณิตอิลลิปติกโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต Geometry Explorer

3. ทำการวัดเจตคติของนักศึกษาที่มีต่อการใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต Geometry Explorer ประกอบการเรียนการสอนรายวิชาเรขาคณิต

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ทุกท่านที่ให้ความร่วมมือในการวิจัย ขอขอบคุณผู้เชี่ยวชาญ ในการตรวจสอบคุณภาพเครื่องมือ ทำให้งานวิจัยนี้มีความเชื่อถือ และขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏราชนครินทร์ที่ให้การสนับสนุนในด้านต่างๆ จนทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

Cederberg, J. (2001). **A course in modern geometries**. (2nd ed.). New York, NY: Springer–Verlag.

Dunham, W. (1994). **The mathematical universe: An alphabetical journey through the great proofs, problems, and personalities.** New York, NY: John Wiley & Sons.

Goldenberg, E. P. & Couco, A. A. (1998). **What is dynamic geometry?** In Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space. R. Lehrer and D. Chazan, eds. London, pp. 351–367: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Greenberg, M. J. (1993). **Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history**. (3rd ed.). New York, NY: W. H. Freeman and Company.

Groman, M. (1996, June). **Integrating "Geometer's Sketchpad" into a Geometry Course for Secondary Education Mathematics Majors.** In Association of Small Computer Users in Education (ASCUE). Paper presented at the Proceedings of the 29th Summer Conference (61-65), North Myrtle Beach, SC: Association of Small Computer Users in Education.

Guven, B. & Karatas, I. (2009). Students discovering spherical geometry using dynamic geometry software. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.** 3(40): pp. 331–340.

Kurtuluş A. & Ada, T. (2011). Exploration of geometry by prospective mathematics teachers in Turkey with Geometer's Sketchpad. **Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics).** 21, 119–126. Palermo, Italy: Department of Mathematics and Computer Science, University of Palermo.

Laborde, C. Kynigos, C. Hollenbrands K. & Straesser, R. (2006). **Teaching and learning geometry with technology.** In A. Guitierrez & P. Boero (Eds.), Research Handbook of the International Group of the Psychology of Mathematics Education (275–304). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Lorsong K. & Singmuang, C. (2015). **A development of mathematics learning achievement entitled angle for Prathomsuksa 5 students using the Geometer's Sketchpad (GSP) laboratory lessons.** Proceedings of International Academic & Research Conference of Rajabhat University: INARCRU III (pp. 134–142). Nakhon Si Thammarat, Thailand: Nakhon Si Thammarat Rajabhat University.

Myers, R.Y. (2009). **The effects of the use of technology in mathematics instruction on student achievement**. FIU Electronic Theses and Dissertations. Paper 136. http://digitalcommons.fiu.edu/etd/136.

Schoenfeld, A. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Hiebert (Ed.) **Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics** (pp. 225–264). Hillsdale, NJ : Erlbaum.

Sebial, L. (2017). Improving Mathematics Achievement and Attitude of the Grade 10 Students Using Dynamic Geometry Software (DGS) and Computer Algebra Systems (CAS). **International Journal of Social Science and Humanities Research.** 5(1), 374–387).

Singmuang, C. & Phahanich, W. (2004). **The use of computer program in learning and teaching introduction to geometry course** (research report). Chachoengsao, Thailand: Author.

Singmuang, C. (2013**). Preservice mathematics teachers discovering spherical geometry using dynamic geometry software.** Proceedings of National Academic Conference "Research Network for Higher Education of Thailand", pp. 218–231. Nakhon Pathom, Thailand: Research Network for Higher Education of Thailand.

Singmuang, C. (2016.) **Exploring Triangle Centers in Euclidean Geometry with the Geometry Explorer.** Proceedings of the Asian Conference on the Social Sciences 6102 (pp. 289–298). Kobe, Japan: The International Academic Forum.

Singmuang, C. (2018). The affects of a Dynamic Geometry Software on Thai preservice teachers' understanding of properties of Saccheri quadrilaterals in the Poincaré Disk Model Proceedings of the International Academic Conference on Social Science, Multidisciplinary and Globalization Studies (Global Meeting of Social Science Community). 26–29 March 2018. Madrid, Spain.

Smart, J. (1998). **Modern Geometry** (5th ed.). Pacific Grove, CA: Brook/Cole.

Smith, R. & Hollebrands, K., Iwancio, K., & Kogan, I. (2007). **The affects of a dynamic program for geometry on college students' understandings of properties of quadrilaterals in the Poincare Disk model**. In D. K. Pugalee, A. Rogerson & A. Schinck (Eds.), Proceedings of the Ninth International Conference on Mathematics Education in a Global Community (pp. 613–618). Charlotte, NC, USA: The University of North Carolina Charlotte.

Stahl, S. (2003). **Geometry from Euclid to Knots.** Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.

Straesser, R. (2002). Cabri–geometre: Does dynamic geometry software (DGS) change geometry and its teaching and learning? **International Journal of Computers for Mathematical Learning.** 6(3), 319–334.